

Desigualdades Geométricas

Douglas de Araujo Smigly

Vamos enunciar e demonstrar algumas desigualdades importantes.

Teorema 1 (Desigualdade das Médias). *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais não negativos. Então*

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \geq n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)^{-1},$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Demonstração: Exercício. 

Teorema 2 (Desigualdade de Weitzenböck). *Sejam a, b, c os lados de um triângulo e A o valor de sua área. Então, a seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$$

A igualdade ocorre quando o triângulo é equilátero.

Demonstração. Seja R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Vamos mostrar primeiramente que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{R\sqrt{3}}$$

Suponha por absurdo que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{3}{R\sqrt{3}}$. Como $a + b + c \leq 3R\sqrt{3}$, (verifique!), Então

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a + b + c) < \frac{3}{R\sqrt{3}} \cdot 3R\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a + b + c) < 9}$$

Note que obtemos uma contradição, uma vez que a desigualdade MA - MH nos fornece

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a + b + c) \geq 9.$$

A área de um triângulo com lados a, b, c e raio da circunferência circunscrita R é dada por:

$$A = \frac{abc}{4R}$$

Utilizando este fato, temos:

$$abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq abc \left(\frac{3}{R\sqrt{3}} \right) \Rightarrow ab + ac + bc \geq \frac{\sqrt{3}abc}{R} \Rightarrow ab + ac + bc \geq 4A\sqrt{3}$$

Observe que

$$(a + b + c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc) \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

Desse modo, concluímos que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \geq 4A\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 + c^2 \geq 4A\sqrt{3}}$$

E obtemos a desigualdade desejada. 

Teorema 3 (Desigualdade de Leibniz). *Seja um triângulo de lados a, b, c , cujo raio da circunferência circunscrita ao triângulo é R . Então, vale que*

$$R^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo for equilátero.

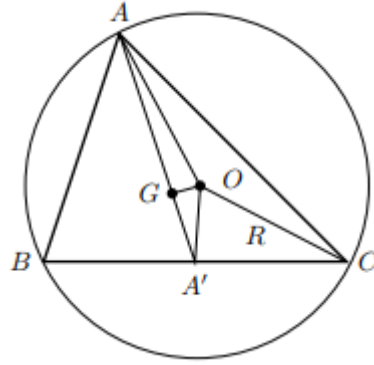
Demonstração. A demonstração da desigualdade segue como consequência do seguinte teorema:

Teorema 4. *Em um triângulo ABC com lados de medidas a, b, c e circuncentro O , bari-centro G e circunraio¹ R , vale a seguinte igualdade:*

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

Para mostrar isso, vamos utilizar o Teorema de Stewart: se L é um ponto no lado BC de um triângulo ABC e $AL = l, BL = m, LC = n$, então $a(l^2 + mn) = b^2m + c^2n$.

Considere a seguinte figura:



Aplicando o Teorema de Stewart para o triângulo OAA' para encontrar a medida de OG , onde A' é o ponto médio de BC , obtemos:

$$AA'(OG^2 + AG \cdot GA') = A'O^2 \cdot AG + AO^2 \cdot GA'$$

Como $AO = R$, $AG = \frac{2AA'}{3}$ e $GA' = \frac{AA'}{3}$, substituindo:

$$OG^2 + \frac{2}{9}(AA')^2 = A'O^2 \cdot \frac{2}{3} + R^2 \cdot \frac{1}{3}$$

Por outro lado, como $(AA')^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$ e $A'O^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$, podemos deduzir que

$$OG^2 = \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \frac{2}{3} + \frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{9} \left(\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}\right) \Rightarrow$$

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{18} \Rightarrow$$

$$OG^2 = R^2 - \frac{3a^2 - 2(b^2 + c^2) - a^2}{18} \Rightarrow$$

¹ Raio da circunferência circunscrita

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

Desse modo, uma vez que $OG \geq 0$, concluímos que

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \Rightarrow R^2 = OG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \Rightarrow$$

$$\boxed{R^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}}$$



Teorema 5 (Desigualdade de Euler). *Sejam R e r respectivamente, o raio do círculo circunscrito e inscrito a um triângulo. Então,*

$$R \geq 2r$$

Demonstração. Considere um triângulo de área S , semi-perímetro p e lados a, b, c opostos, respectivamente, aos vértices A, B e C . Aplicando a desigualdade MA-MG para os números reais positivos $p - b$ e $p - c$, temos que

$$(p - b) + (p - c) \geq 2\sqrt{(p - b)(p - c)}$$

Veja que

$$(p - b) + (p - c) = \frac{a + b + c}{2} - b + \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + c - b}{2} + \frac{a + b - c}{2} = a$$

Assim,

$$a \geq 2\sqrt{(p - b)(p - c)}$$

Procedendo com um raciocínio análogo, podemos obter também que

$$b \geq 2\sqrt{(p - a)(p - c)}$$

$$c \geq 2\sqrt{(p - a)(p - b)}$$

Multiplicando-se os lados, esquerdo e direito, destas três desigualdades obtemos

$$abc \geq 8(p - a)(p - b)(p - c)$$

Como a área do triângulo é dada por

$$S = \frac{abc}{4R} \text{ e } S = pr,$$

substituindo obtemos:

$$abc \geq 8(p - a)(p - b)(p - c) \Rightarrow 4RS \geq 8\frac{S^2}{p} \Rightarrow 4RS \geq 8\frac{S}{p} \cdot S \Rightarrow 4RS \geq 8rS \Rightarrow \boxed{R \geq 2r}$$



A título de curiosidade, segue o enunciado de outras desigualdades, que podem ser pensadas como generalizações das relações já demonstradas.

Teorema 6 (Desigualdade de Pedoe). *Considere um triângulo com área S e medidas de lados a, b, c , e outro triângulo, com área T e medidas de lados x, y, z . Então,*

$$a^2(y^2 + z^2 - x^2) + b^2(z^2 + x^2 - y^2) + c^2(x^2 + y^2 - z^2) \geq 16ST$$

A igualdade ocorre se, e somente se, os triângulos forem semelhantes.

Teorema 7 (Desigualdade de Bottema). *Seja ABC um triângulo com lados de medidas $a = BC, b = CA, c = AB$ e área S . Seja XYZ um triângulo com lados de medidas $x = YZ, y = ZX, z = XY$ e área T . Considere P um ponto arbitrário no triângulo ABC . Então, é válida a desigualdade*

$$x \cdot AP + y \cdot BP + z \cdot CP \geq \sqrt{\frac{a^2(y^2 + z^2 - x^2) + b^2(z^2 + x^2 - y^2) + c^2(x^2 + y^2 - z^2)}{2}} + 8ST$$

Teorema 8 (Desigualdade de Shapiro). *Suponha $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n$ números positivos, e:*

- *n é par e menor ou igual a 12, ou*
- *n é ímpar e menor ou igual a 23.*

Então, vale que

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}$$

onde $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$.

Bibliografia.

- **Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach**, Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega, Rogelio Valdez Delgado.